WISKUNDE VI, cursus '91–'92, Tentamen

maandag 17 augustus 1992, duur: drie uur.

1.[1] De onderdelen (i) en (ii) zijn onafhankelijk van elkaar.
(i) De funktie $f(z)$ is analytisch in de open schijf $|z| < 3$. Bewijs:
(a)[2] $|f(z)| = |z^2 + 1|$ als $|z| < 3$ $\Rightarrow$ $f(z) = c(z^2 + 1)$ voor een constante $c \in \mathbb{C}$ met $|c| = 1$.
(b)[2] $|f(z)| \leq |z^2 + 1|$ als $|z| < 3$ en $f(\pm 1) = 0$ $\Rightarrow$ $|f(z)| \leq \frac{1}{3}|z^4 - 1|$ voor $|z| \leq 2$.
(ii)[4] De funktie $f(z)$ heeft in $z = 1$ een geïsoleerde singulariteit en wel een enkelvoudige pool met residu 1. Bepaal de aard van de singulariteit (ophefbare of essentiële singulariteit of pool) in $z = 1$ van de funkties:

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)^2 f(z)}, \quad h(z) = f(z^2).$$

Als de singulariteit een pool is bepaal dan ook het residu.

2.[1] De onderdelen (i) en (ii) van deze opgave kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt.
(i)[3] Bereken met behulp van de Laurentreeks voor $(z^n + z^{-n})e^z$ de integraal

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, e^{\cos\varphi + i\sin\varphi - 2ni\varphi} \, d\varphi$$

voor het geval $n = 4$.
(ii)[6] Bepaal de hoofdwaarde-integraal

$$\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x - ai)^2}.$$

Geef de benodigde afschattingen volledig weer.

3.[1] (i)[2] Bepaal het Riemann P-symbool van de differentiaalvergelijking van Legendre ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(1 - z^2)w''(z) - 2zw'(z) + n(n+1)w(z) = 0.$$

(ii)[1] Waarin onderscheid het n-de orde Legendre polynoom $P_n(z)$ zich van elke andere (van $P_n(z)$ lineair onafhankelijke) oplossing van de differentiaalvergelijking? Bedoeld wordt het gedrag van de funkties in de punten $z = \pm 1$.

(Z.O.Z.)